

## 社会公共资源动态分配频率与效率

王 湛 程 瑶\*

**摘 要** 首位交易循环机制在社会公共资源分配的静态环境下能够同时兼顾有效性、个人理性和防策略性。但在动态实践中,因为分配频率不同,这三个性质分别存在缺失。本文从帕累托有效和社会总福利两方面讨论了动态分配频率与效率之间的关系。首先,证明了能够兼顾帕累托有效、个人理性与防策略性的动态机制不存在。其次,发现交换频率对分配机制的有效性存在影响,且社会总福利与机制的分配频率不存在单调关系,但存在一个最优分配频率。

**关键词** 机制设计, 动态分配, 分配频率

**DOI:** 10.13821/j.cnki.ceq.2022.04.11

### 一、社会公共资源动态分配实践与研究现状

经济学上“公共资源”需要同时满足以下两个条件:一是不为任何个人或组织所拥有;二是可以为一部分社会成员自由利用。正是这两个条件决定了公共资源具备了“竞争性”,但不具备“排他性”的特征。公共资源主要分为自然资源和社会资源。自然资源包括:森林资源、矿产资源以及水资源等。通常情况下除非关系到国家安全,大多数自然资源的使用权分配一般是通过货币实现的,例如拍卖或者承包等方式。而社会资源包括:公租房,公立学校学位以及公立养老院房屋等。以货币为媒介的交易机制对社会公共资源进行分配是不可行的。一方面,在社会公共资源分配中,由于大部分存在政府补贴,使得价格低于市场均衡,如果利用货币进行再分配,会让价格回到市场均衡,从而导致政府补贴失效。另一方面,某些社会公共资源如果使用货币分配方式易引发一系列社会伦理问题。例如肾脏、骨髓等器官移植问题,货币分配的方式易引起器官买卖等伦理道德和犯罪问题,所以世界上绝大多数国家都严格禁止器官买卖。因此,引入非货币支付的市场机制提供了新的思路,即通过交换或分配对公共资源进行配置。

\* 王湛,西南财经大学中国西部经济研究院;程瑶,西南财经大学经济学院。通信作者及地址:程瑶,四川省成都市温江区柳台大道555号西南财经大学经济学院,611130;电话:18616202073;E-mail:chengyao@swufe.edu.cn。感谢国家自然科学基金青年项目“骨髓移植动态交换机制理论与仿真实验研究”(72001177)以及国家自然科学基金重点项目“市场设计的计算机仿真模拟实践研究”(72033003)的资助。作者感谢马金鹏教授和杨再福教授对于本文工作论文的帮助和审稿人的意见。文责自负。

### (一) 静态假设下首位交易循环机制在理论上是有效的

Shapley and Scarf (1974) 最早讨论了房屋市场的分配问题, 即每名参与者拥有一个不可分割物品如房屋, 并寻求交换以换得更喜欢的房屋。他们证明了该分配问题核 (core) 的存在性, 并能够通过首位交易循环机制 (top trading cycles, TTC)<sup>1</sup> 得到。通过核的定义, 可以得到 TTC 机制满足帕累托有效 (Pareto efficiency, PE) 和个人理性 (individual rationality, IR)。Roth and Postlewaite (1977) 证明了房屋分配市场中严格核 (strict core) 的存在性和唯一性, 并发现 TTC 机制能够找到严格核中的唯一分配。Ma (1994) 证明了 TTC 机制是唯一能够同时满足个人理性、帕累托有效和防策略性 (strategy-proofness, SP) 的算法。

一些学者将这些理论研究应用到了实践之中。Roth *et al.* (2004, 2005, 2007) 将分配机制应用到肾源交换问题中。其中, Roth *et al.* (2004) 将 Abdulkadiroğlu and Sönmez (1999) 提出的首位交易循环-链 (top trading cycle and chain, TTCC)<sup>2</sup> 算法应用到肾脏移植交换中。TTCC 机制是 Shapley and Scarf (1974) 提出 TTC 机制的一种推广。该机制在原有交易循环的基础上, 把已经承租房屋的租客与交易循环相连形成了一些非闭合的交易链。在严格偏好假设下 TTCC 机制与 TTC 机制具有许多相同的性质。

从文献可以看出 TTC 机制能够在尊重参与者初始禀赋的基础上, 实现充分的交换。理论证明, TTC 机制在静态假设下——所有的参与者和被分配物品同时进入或离开项目——既能保证帕累托有效, 也能够保证个体理性和防策略性。

### (二) TTC 机制在动态环境下的有效性会受到分配频率的影响

在静态环境下, TTC 机制能够同时兼顾有效性和其他一些性质, 并被推广应用到肾源分配、中小学学位分配等实践问题中。但是在实践中, 由于参与者和被分配物品的不断进出, 运行 TTC 机制不能等到所有参与者和被分配物品都进入项目再开始交换, 只能在动态环境下多次运行。因此, 在动态环境中 TTC 机制在帕累托效率、个人理性和防策略性的兼容性会受到分配频率的影响:

(1) 当分配频率较低时, 较多参与者会在交换的间隔期因各种原因离开项目, 而他们的离开会影响交换循环的形成, 从而对整个项目的分配效率造成影响, 如果他们加入交换会实现项目匹配的帕累托改进;

<sup>1</sup> 该算法最早是由大卫·盖尔 (David Gale) 提出的。

<sup>2</sup> Abdulkadiroğlu and Sönmez (1999) 沿用了 TTC 机制的称谓, 直到 Roth *et al.* (2004) 将之命名为 TTCC。

(2) 当分配频率较高时, 较多参与者参加多次交换匹配, 虽然 TTC 机制单期交换具有防策略性, 但参与者有可能通过谎报偏好牺牲前期的分配从而让自己在后期得到更好的分配。这样的策略性行为将会违背动态环境下的防策略性质。

实践中这样的例子很多。例如英国活体肾源共享计划 (living kidney sharing schemes, LKSS) 每三个月执行一次, 即在每年3月、6月、9月和12月末都会将项目中的患者和供体进行一次交换匹配。假设项目中有四位患者  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ , 各自有一位亲属供者分别为  $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ , 其中前三位患者及其亲属供者在1月进入 LKSS; 而患者  $A_4$  和供者  $H_4$  在3月初进入市场。每位患者和自己的亲属供者都不匹配。假设患者  $A_3$  只能存活到2月, 而患者  $A_1$ 、 $A_2$  和  $A_4$  能够生存至5月末。四位患者的偏好  $\succ_i$  如表1所示:

表1 患者的偏好

$\succ_1$	$\succ_2$	$\succ_3$	$\succ_4$
$H_4$	$H_4$	$H_2$	$H_3$
$H_3$	$H_1$	$H_4$	
	$H_3$		

LKSS 项目到3月末开始交换匹配, 患者  $A_3$  和亲属供者  $H_3$  已经离开了匹配项目, 剩下的患者和供体无法交换, 意味着全部四位患者面临骨髓匹配失败而失去移植机会。如果在1月末增加一次骨髓交换匹配, 那么 TTC 机制可以让  $A_1$  得到  $H_3$ ,  $A_2$  得到  $H_1$ ,  $A_3$  得到  $H_2$ 。允许患者将2月末得到的供体在3月末进行再次交换, 可以让  $A_1$  得到  $H_4$ ,  $A_2$  得到  $H_1$ ,  $A_4$  得到  $H_3$ 。最终分配结果显示: 每位患者都进行了骨髓移植。很显然, 增加匹配交换频率提高了分配效率, 但是这有可能会让其中某些患者 ( $A_2$ ) 谎报自己的偏好来得到更好的分配, 这违背了机制防策略的目标。

一些文献对动态环境下分配机制的性质进行了讨论。Abdulkadiroğlu and Loortcher (2007) 讨论了动态的房屋分配问题, 他们假设在参与者与房屋都不改变的前提下, 参与者对房屋的偏好会发生改变, 并证明了利用随机序列优先机制得到的动态分配是帕累托有效的。Kurino (2020) 把学生宿舍分配问题放在了动态模型框架下加以分析, 他发现在重叠代际 (overlap generation, OLG) 模型中不存在同时满足动态帕累托有效与个人理性的机制, 为了找到更好的性质, Kurino (2020) 找到了一个具有更好性质的问题子集, 假设参与者在动态分配过程中每一期的偏好序列是固定的。他证明了满足这个假设的问题中, TTC 机制和特定序列定义下的 SD 机制能够同时实现动态帕累托有效、个人理性与防策略性。Bloch and Cantala (2013) 讨论了与 Kurino (2020) 类似的问题, 并限制每一期进出市场的参与者只有一人。

他们定义了机制的独立性、有效性和公平性，并证明了独立性与有效性不相容，也给出了有效性和公平性的相容条件。Liu (2018) 讨论了更广泛的动态分配模型，参与者和物品进入市场的时期外生给定，发现了动态 TTC 不一定是防策略的，并给出了动态 TTC 机制运行过程中不存在策略性行为的条件。更多文献讨论了动态环境下的双边匹配市场。与本文讨论的物品分配不同(单边分配问题)，双边匹配市场的参与者被分为两个不相交的集合并且都是行为策略者。如择校问题 (Dur, 2012; Bando, 2012; Pereyra, 2013)、一对一匹配问题 (Damiano and Lam, 2005; Kurino, 2020) 等。Zhang and Zheng (2017) 研究双边匹配市场中在动态环境下的稳定匹配问题，并讨论不同承诺机制下可实现的动态稳定匹配机制。与本文不同，Zhang and Zheng (2017) 允许参与者偏好是跨期可变的。本文与相关文献在模型假设上的不同如表 2 所示。

本文讨论的是动态物品分配机制。从前面 LKSS 中的例子中可以看到，动态机制有效性问题主要是由于“参与者和物品进入或者离开市场”的动态行为对分配机制效率产生的影响，而上述动态分配文献讨论的动态行为与此不同。因此，本文需要重新建立模型对其进行分析，同时为了简化模型，让讨论更有针对性，本文假设在整个动态分配过程中，参与者的偏好保持不变。

表 2 相关文献中关于动态分配模型的假设

单边动态分配文献	动态模型						
	参与者		初始禀赋		公共资源		偏好
	进入	离开	进入	离开	进入	离开	是否改变
Abdulkadiroglu and Loortscher (2007)							是
Kurino (2020)	✓	✓	无初始禀赋				否
Bloch and Cantala (2013)	✓	✓	无初始禀赋				否
Liu (2018)	✓		✓				否
本文	✓	✓	✓	✓	✓	✓	否

在有禀赋的分配问题中，机制的帕累托有效性、个人理性和防策略性是三个经典性质，并被广泛讨论 (参见：Ma, 1994; Svensson, 1999; Konishi *et al.*, 2001; Morrill, 2013; 等等)。本文以此动态模型为框架，研究动态环境下分配机制的帕累托有效、个人理性以及机制防策略性，并从帕累托有效和社会总福利两个角度讨论效率与分配频率的关系。

值得指出的是，公平性是评价分配机制结果的另一重要性质。如在器官捐献问题中尤其需要关注等候名单上的患者的公平性，即他们的优先权需要被尊重。但是常用的公平性目标，例如无嫉妒 (envy-freeness)、消除合理嫉妒 (no justified envy) 或者稳定 (stability) 等目标在单向分配问题中常常和个体理性冲突，在带初始禀赋的问题中，分配机制对初始禀赋的尊重常常被

认为是更重要的，因此这些与个体理性相冲突的公平性目标讨论较少，但在双向匹配问题中，这些目标通常是需要重点讨论的。如 Lien *et al.* (2016) 讨论了在要求学生考前填报志愿偏好的前提下，波士顿机制相较于序列优先机制在公平性和有效性上的改进；Lien *et al.* (2017) 进一步讨论了在择校问题中波士顿机制和序列优先机制在考前和考后填报志愿偏好的事前公平性。

本文定理 1 通过构造反例证明了不存在同时满足帕累托有效、个人理性和防策略性的动态分配机制。在该反例中，参与者真实报告偏好能够得到唯一的一组满足个人理性和有效性的分配，并发现一位参与者可以通过谎报自己的偏好，得到另外一组唯一满足个人理性和有效性的分配，相对于真实偏好下的分配，这位参与者能够通过撒谎让自己在第二期获利。

本文进一步发现动态环境中分配频率会对分配效率产生影响，并从帕累托有效和社会总福利两个角度分析该影响。在帕累托有效方面，本文分析动态分配频率对分配效率以及防策略性的影响，发现提高动态分配机制频率能够提高分配效率但会牺牲其防策略性，而降低分配机制频率能够提高其防策略性但会牺牲效率。在社会总福利方面，本文发现提高分配频率并不一定能提高社会总福利，即交换频率与总期望效率并不存在单调关系。在一些分配问题中，为充分保证公平性，会要求每个参与者只参与分配一次，那么动态交换机制的运行频率会影响到每次分配市场的规模，而市场规模通常与市场有效性成正相关关系。总的来说，分配频率越小，市场规模越大，市场效率越高。但是交换频率变小后又会导致在交换间隔期内离开项目的参与者增多，使得单位时间内的市场总规模降低，降低市场效率。

因为交换频率与社会总福利不存在单调关系，所以理论上存在最优的分配频率使得最终的分配效率最高。本文第四部分将使用仿真模拟方法去寻找这一类问题中的最优分配频率。本文对骨髓移植供体分配问题进行模拟实验，与大多数实践问题中参与者偏好较为主观不同，骨髓移植问题中参与者偏好是由患者与供体基因匹配度决定的，偏好客观可观察。因此，本文借助人类白细胞表面抗原 (HLA) 地区基因频率库进行仿真模拟，比较不同动态机制分配频率下患者生存率，来寻找到不同环境下的最优分配频率。

本文其他部分安排如下：第二部分构建了动态分配模型，定义了帕累托有效、个人理性和防策略性三个性质，并证明了同时满足三个性质的动态分配机制不存在。第三部分讨论动态分配频率对帕累托有效性的影响，证明了在满足个人理性和单期有效性的前提下，频率最快时帕累托有效性成立，频率最慢时防策略性成立，而其他时候既不满足防策略性也不满足帕累托有效性。第四部分借助骨髓移植捐赠问题讨论分配频率对社会总福利的影响。仿真模拟发现，分配频率对社会总福利并不存在单调关系，在不同的市场环境下，存在不同的最优分配频率。第五部分总结全文。

## 二、动态分配模型与机制

本文考虑允许两类骨髓移植捐献者,即亲属捐献者和利他捐献者,参与交换。由于亲属捐献者只愿意捐献给亲属患者或者通过交换为亲属患者得到匹配的骨髓,因此这类捐献者可以被视为亲属患者的私有禀赋。与亲属捐赠者不同,利他捐赠者没有指定的捐献对象,因此这类捐献者则进入公共骨髓库作为公共资源等待被分配给匹配的患者。具体模型如下。

考虑一个动态分配问题。令  $A$  为有限参与者集合和  $H$  为有限物品集合。参与者的初始禀赋是从参与者集合到物品集合与空集的一个映射  $\mu_0: A \rightarrow H \cup \{\emptyset\}$ 。假设市场运行时间有限,不妨令  $N^T = \{1, 2, \dots, T\}$  代表市场运行期数集合,其中  $T \geq 1$ 。在动态环境中,每名参与者与其初始禀赋一起进入市场,不同参与者与其初始禀赋进入的时间可能不同。具体地,令参与者加入市场的时间  $T^A: A \rightarrow N^T$  是一个参与者集合  $A$  到  $N^T$  的映射;参与者离开市场的时间  $Q^A: A \rightarrow N^T$  是一个参与者集合  $A$  到  $N^T$  的映射;物品加入市场的时间  $T^H: H \rightarrow N^T$  是一个物品集合  $H$  到  $N^T$  的映射,并且设置  $Q^H$  为物品离开的时间集合<sup>3</sup>。显然,如果物品是参与者  $A_i$  的初始禀赋,那么他们进入市场的时间相同,即  $T^A(A_i) = T^H(\mu_0(A_i))$  对任意  $A_i \in A$  成立。与此同时,每位参与者和每个物品离开市场时间不低于其进入市场的时间,即对于任何  $A_i \in A$ ,  $T^A(A_i) \leq Q^A(A_i)$  和对于任何  $H_j \in H$ ,  $T^H(H_j) \leq Q^H(H_j)$ 。另外,令第  $t$  期市场中的参与者子集和物品子集分别为  $A^t = \{A_i \mid T^A(A_i) \leq t, Q^A(A_i) > t\}$  和  $H^t = \{H_j \mid T^H(H_j) \leq t, Q^H(H_j) > t\}$ 。每名参与者  $A_i$  对物品集合  $H$  上的所有物品存在偏好  $\succsim_i$ ,即对任意两个物品  $H_j, H_k \in H$ ,  $H_j \succ_i H_k$  说明参与者  $A_i$  对物品  $H_j$  的偏好严格优于  $H_k$ ,  $H_j \sim_i H_k$  说明参与者  $A_i$  对物品  $H_j$  的偏好与  $H_k$  相同。本文假设所有偏好都是严格的,因此  $H_j \sim_i H_k$  当且仅当  $j = k$ 。所有参与者的偏好组合定义为  $\succsim = (\succsim_i)_{A_i \in A}$ 。因此,一个不可分割物品动态分配问题为一个九元组合  $\omega = (A, H, T, \mu_0, T^A, T^H, Q^A, Q^H, \succsim)$ 。令所有问题的集合为  $\Omega$ 。

对于任意时期  $t$ ,定义  $\mu_t: A \rightarrow H \cup \{\emptyset\}$  为物品在时期  $t$  上的分配(简称为  $t$ -期分配),即是参与者集合到物品集合与空集的一个映射。一个  $t$ -期分配是可行的,要求任何一名在  $t$  期后进入市场的参与者及其初始禀赋不会加入  $t$  期的交换市场,并在  $t$  期时还持有自己的初始禀赋,而  $t$  期前离开市场的参与者及其最终分配不会加入  $t$  期的交换市场,并在  $t$  期时还持有自己的最终分配。即一个  $t$ -期分配  $\mu_t^*$  是可行的,如果对任意  $A_i \in \{A_i \mid T^A(A_i) > t\}$ ,  $\mu_t^*(A_i) = \mu_0(A_i)$ ;同时对任意  $A_i \in \{A_i \mid Q^A(A_i) < t\}$ ,  $\mu_t^*(A_i) = \mu_{Q^A(A_i)}(A_i)$ 。

<sup>3</sup> 由于物品没有最后离开期限,因此离开的时间可以由机制内生的,因此未给出具体的函数形式。

令一个动态分配为  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_T)$ 。动态分配  $\mu$  是可行的，要求任意  $t$ -期分配  $\mu_t$  都是可行的，其中  $1 \leq t \leq T$ 。令所有动态分配集合为  $\bar{\Pi}$ ，以及所有可行动态分配集合为  $\Pi \subset \bar{\Pi}$ 。为了简化，除特殊说明，后文提到的分配皆为可行的分配。对两个可行分配  $\mu, \mu' \in \Pi$ ，如果有参与者  $A_i$  对动态分配  $\mu$  弱偏好于  $\mu'$ ，说明参与者对  $\mu$  中的每一期分配都弱偏好于  $\mu'$ ；如果有参与者  $A_i$  对动态分配  $\mu$  强偏好于  $\mu'$ ，说明参与者在弱偏好基础上对  $\mu$  中的某一期分配严格偏好于  $\mu'$ 。即  $\mu \succsim_i \mu'$  当且仅当对任意时期  $t \leq T, \mu_t(A_i) \geq_i \mu'_t(A_i)$ ； $\mu \succ_i \mu'$  当且仅当  $\mu \succsim_i \mu'$  且存在一期  $t^* \leq T, \mu_{t^*}(A_i) \succ_i \mu'_{t^*}(A_i)$ 。<sup>4</sup>

本文选取带禀赋分配问题中三个经典性质：帕累托有效、个人理性、防策略性讨论动态机制。值得指出的是，这三个性质是 Ma (1994) 第一次对 TTC 机制完成公理化所选择的性质，即证明静态环境下 TTC 机制是唯一满足这三个性质的机制。Svensson (1999) 证明在私有禀赋分配市场，一个机制是帕累托有效、个人理性和防策略的，当且仅当该机制是核机制。Roth *et al.* (2004) 首次运用 TTC 机制来讨论肾源交换问题，并证明在肾源交换项目中 TTC 机制对防策略和帕累托有效的实现。

一个动态分配是**帕累托有效的 (PE)**，要求其每一期的分配都不能被另一个可行分配帕累托改进。即一个动态分配  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_T)$  是帕累托有效的，当且仅当不存在另一个可行的分配  $\mu' = (\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_T)$  满足：

- (1) 对时期  $t \leq T$ ，任意参与者  $A_i \in A^t, \mu'_t(A_i) \geq_i \mu_t(A_i)$ 。
- (2) 至少存在一位参与者  $A_k \in A^t, \mu'_t(A_k) \succ_k \mu_t(A_k)$ 。

一个动态分配是**个人理性的 (IR)**，要求其每一期的分配都不比上一期的分配差。即一个动态分配  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_T)$  是个人理性的，当且仅当对任意参与者  $A_i \in A^t$ ，时期  $t, \mu_t(A_i) \geq_{A_i} \mu_{t-1}(A_i)$ 。

一个动态分配机制  $\varphi: \Omega \rightarrow \Pi$ ，是指对任意不可分割物品动态分配问题能够系统地得到一个可行的分配结果。一个动态分配机制  $\Phi$  是帕累托有效的、个人理性的，如果对任意不可分割物品动态分配问题  $\omega \in \Omega$ ，该机制总能得到一个帕累托有效的、个人理性的动态分配结果。

一个动态机制是**防策略的 (SP)**，要求对任意分配问题，该机制运行过程中没有参与者能够通过谎报偏好让其在任何一期获利。即一个动态分配机制  $\varphi$  是防策略的，当且仅当对任意不可分割物品动态分配问题  $\omega = (A, H, T, \mu_0, T^A, T^H, Q^A, Q^H, \succsim) \in \Omega$ ，任意偏好  $\succsim' = (\succsim_{-i}, \succsim'_i) \neq \succsim, \omega' = (A, H, T, \mu_0, T^A, T^H, Q^A, \succsim')$ ， $\varphi(\omega) = \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_T)$ ， $\varphi(\omega') = \mu' = (\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_T)$ ，任意参与者  $A_i$  和时期  $t$ ，下式总是成立：

<sup>4</sup> 需要注意的是这里参与者对于动态分配的偏好并不完备，但不影响本文后续的定性研究。例如  $\mu_1(A_i) \succ_i \mu'_1(A_i), \mu'_2(A_i) \succ_i \mu_2(A_i) \Rightarrow \mu \not\succeq_i \mu'$ ，但并不说明  $\mu' \not\succeq_i \mu$ 。

$$\mu_t(A_i) \geq_i \mu'_t(A_i).$$

首先, 本文介绍在静态环境下, 同时存在公共物品和个人禀赋分配问题中的首位交易循环 (TTC) 机制。该机制被证明在静态环境下, 具有个人理性、有效性和防策略性。

静态环境下 ( $T=1$ ), 首位交易循环 (TTC) 机制<sup>5</sup>。给定问题  $\omega = (A, H, 1, \mu_0, T^A, T^H, Q^A, Q^H, \geq)$ , 根据轮候顺序<sup>6</sup>, 排序最靠前且还在市场的参与者向尚未被移除系统的物品 (包括公共物品和所有的禀赋) 中偏好最高者申请交易, 如果被申请交易物品  $H_i$  为某参与者的初始禀赋  $\mu_0(A_i) = H_i$ , 则继续由该参与者申请交易, 以此类推, 直到出现交易循环终止交易, 完成循环中所有交易申请, 并将循环中所有参与者和物品移除系统。如果被申请交易物品是未分配物品, 则终止发起交易, 并将本轮所有交易申请完成并移除本轮涉及所有参与者和物品。同时, 在交换中未分配的初始禀赋成为未分配公共资源, 以供后续的参与者选择。重复上述过程直到所有的参与者都被移除系统。

**引理 1** 当  $T=1$  时, TTC 机制同时满足帕累托有效、个人理性和防策略 (Abdulkadiroğlu and Sönmez, 1999)。<sup>7</sup>

将引理 1 放在本文的模型中: TTC 机制是一个从问题子集  $\Omega^1 = \{\omega \mid \omega \in \Omega, T=1\} \subset \Omega$  到 1-期分配集合  $\Pi^1$  的映射,  $\varphi^{TTC}: \Omega^1 \rightarrow \Pi^1$ 。且对任意分配问题  $\omega = (A, H, 1, \mu_0, T^A, T^H, Q^A, Q^H, \geq) \in \Omega^1$ , 分配  $\mu^{TTC} = \varphi^{TTC}(\omega)$  总是同时满足帕累托有效、个人理性和防策略。

那么一个自然的问题: 在  $T>1$  的动态分配问题中, 是否存在一个机制能够同时满足以上三个性质? 定理 1 给出了否定的答案。

**定理 1** 当  $T>1$  时, 不存在同时满足帕累托有效、个人理性和防策略的分配机制。

证明: 这里用一个反例证明该不存在性定理。<sup>8</sup>例 1: 令一个动态分配问题  $\omega = (A, H, T, \mu_0, T^A, T^H, Q^A, \geq)$ 。其中参与者集合为  $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ , 物品集合为  $H = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ , 参与者初始禀赋为  $\mu_0(A_1, A_2, A_3, A_4) = (H_1, H_2, H_3, H_4)$ 。其中前三位参与者在时期  $t=1$  进入市场,  $T^A(A_1) = T^A(A_2) = T^A(A_3) = 1$ ; 而参与者  $A_4$  在时期  $t=2$  进入市场,  $T^A(A_4) = 2$ 。四位参与者离开市场的时间为  $Q^A(A_1) = Q^A(A_2) = Q^A(A_4) = 2, Q^A(A_3) = 1$ 。四位参与者的偏好  $\geq$  如表 3 所示:

<sup>5</sup> 本文继续沿用 Abdulkadiroğlu and Sönmez (1999) 文中 TTC 机制的称谓。

<sup>6</sup> 该轮候顺序用于对非禀赋物品, 即公共物品的选取权利顺序。

<sup>7</sup> 这里的 TTC 机制要求新一期进入的参与者有一个严格序列, 本文假设该序列外生。该外生序列并不影响机制的帕累托有效性、个人理性以及机制的防策略性。因此本文不对其作过多讨论。

<sup>8</sup> 值得注意的是例 1 中呈现的反例不是结构最简单的反例, 最简单结构反例见附录, 篇幅所限, 附录从略, 留存备案。



表 3 例 1 中参与者的偏好

$\succsim_1$	$\succsim_2$	$\succsim_3$	$\succsim_4$
$H_4$	$H_4$	$H_2$	$H_3$
$H_3$	$H_1$	$H_4$	$H_4$
$H_1$	$H_3$	$H_3$	
	$H_2$		

在此例子中，假设存在一个同时满足三个性质的动态分配机制  $\varphi$ 。如图 1 所示，每一位参与者真实报告偏好，则只存在一个唯一的 1-期帕累托有效，1-期个人理性的 1-期可行分配， $\mu_1(A_1, A_2, A_3, A_4) = (H_3, H_1, H_2, H_4)$ ，和唯一的一个 2-期帕累托有效，2-期个人理性的 2-期可行分配， $\mu_2(A_1, A_2, A_3, A_4) = (H_4, H_1, H_2, H_3)$ 。因此， $\varphi(\omega) = \mu = (\mu_1, \mu_2)$ 。

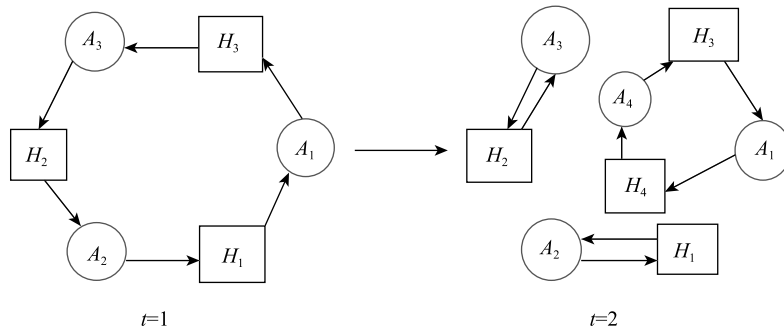


图 1 真实报告偏好下唯一满足 IR 和 PE 的分配结果

现考虑参与者  $A_2$  并不报告他的真实偏好，而将偏好报告为  $\succsim'_2: H_4, H_3, H_1, H_2$ 。令  $\succsim' = (\succsim_{-2}, \succsim'_2)$ ，由此形成的新的动态分配问题  $\omega' = (A, H, T, \mu_0, T^A, T^H, Q^A, Q^H, \succsim')$ 。如图 2 所示，在偏好  $\succsim'$  下，只存在一个唯一的 1-期帕累托有效，1-期个人理性的 1-期可行分配， $\mu'_1(A_1, A_2, A_3, A_4) = (H_1, H_3, H_2, H_4)$ ，和唯一的一个 2-期帕累托有效，2-期个人理性的 2-期可行分配， $\mu'_2(A_1, A_2, A_3, A_4) = (H_1, H_4, H_2, H_3)$ 。因此， $\varphi(\omega') = \mu' = (\mu'_1, \mu'_2)$ 。

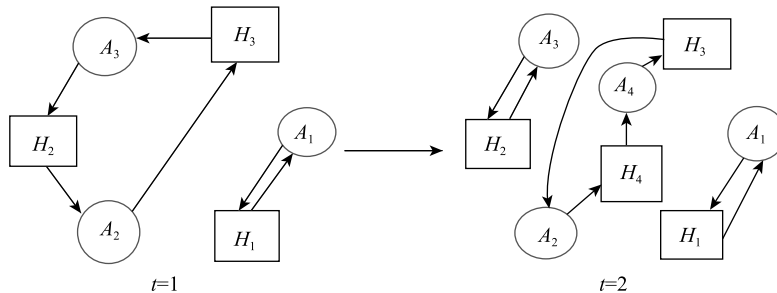


图 2  $A_2$  谎报偏好下唯一满足 IR 和 PE 的分配结果

比较  $\varphi(\omega)$  与  $\varphi(\omega')$ ，可以发现  $\mu'_2(A_2) \succ_2 \mu_2(A_2)$ ，并且  $\succsim' =$

( $\geq -_2, \geq '2$ )，根据机制防策略定义，推断机制  $\varphi$  并不是防策略的。由此可以推断出，任意同时满足个人理性和帕累托有效的机制都不是防策略的，因此对于动态分配问题  $\omega$ ，同时满足帕累托有效、个人理性和防策略的机制不存在。定理 1 得证。

由于引理 1 证明在静态环境下 TTC 机制能够同时满足这些性质，接下来本文将进一步探讨导致了动态环境下有效性和防策略性之间冲突的原因。从前文 LKSS 的例子可以看到，当每三个月分配一次时，全部四位患者面临骨髓匹配失败，即最终的分配效率不足，但分配满足个人理性并且参与者不存在策略性行为，满足防策略性；当提高分配频率，也就是增加交换次数，全部四位患者都可以进行器官移植，这实现了帕累托有效。但参与者中可能出现策略性行为，如患者  $A_2$  可以通过谎报偏好来得到更好的分配，因此防策略性存在损失。LKSS 的例子说明分配机制的分配频率对动态分配的有效性和防策略性存在影响，接下来本文将对这些影响进行分析。

### 三、分配频率对动态机制有效性的影响

本文先从两个极端：最快的和最慢的分配频率来讨论其对动态帕累托有效性的影响。在单期分配问题中，TTC 机制是唯一满足帕累托有效、个人理性以及防策略性的机制 (Ma, 1994; Abdulkadiroğlu and Sönmez, 1999)。因此，为了排除其他因素对有效性的干扰，本文每一次分配都采用静态的 TTC 机制，保证当期分配是有效的。

#### (一) 最快的分配频率——每期分配的动态 TTC 机制 (Dynamic TTC-Highest Frequency, DTTC-HF)

假设在 DTTC-HF 机制运行过程中，每一期都会进行分配。每位参与者进入市场都会马上参与分配交换，不存在等待的情况。在公共资源分配实践中，能够保证参与者随时进入就能组织分配的分配机制通常比较简单，例如器官移植、大多数公立小学采用的序列优先 (serial dictatorship) 机制。由于该机制缺乏交换，在存在个人禀赋的市场中，该机制单期内不能保证有效性，因此不在本文的讨论范围。如果要求单期有效，这样的分配在公共资源分配的实践中就比较少见，因为组织公共资源分配的成本较高，并且参与者众多，很难保证参与者随时进入就能组织大规模的交换。类似的分配机制更多会出现在一些非公共资源分配实践中，这些实践中也会因为各种原因禁止使用货币进行配置。例如职业体育联盟中运动员的合同分配机制，每有新运动员或者新俱乐部进入市场，都会有一次交换的机会。每次分配都采用静态 TTC 机

制，具体机制运行过程如下：

$\varphi^{HF}$  运行过程：每期的匹配总是以上一期的匹配结果作为新一期所有的参与者禀赋运行 TTC 机制。即，对任意动态分配问题  $\omega = (A, H, \mu_0, T^A, T^H, Q^A, Q^H, >)$ ， $\varphi^{HF}(\omega) = \mu^{HF} = (\mu_1^{HF}, \mu_2^{HF}, \dots, \mu_T^{HF})$  满足，对任意  $t=1, 2, \dots, T$ ，

$$\mu_t^{HF}(A_i) = \begin{cases} \varphi^{TTC}(A^t, H^t, \mu_{t-1}^{HF}, >)(A_i), & A_i \in A^t \\ \mu_0(A_i), & A_i \notin A^t \end{cases}$$

**定理 2** DTTC-HF 满足帕累托有效性、个人理性，但不满足防策略性。

详细证明参见附录。定理 2 说明了当分配频率达到最高时，存在满足帕累托有效和个人理性的机制。同时，想要达到帕累托有效和个人理性，那么防策略性就无法满足。

## (二) 最慢的分配频率——最后一期分配的动态 TTC 机制 (Dynamic TTC-Lowest Frequency, DTTC-LF)

对于大多数公共资源分配实践，例如公共租赁住房、一些公立中小学的学位，也包括骨髓、肾脏等移植交换项目。如果要求单次分配的有效性，需要加入交换，通常会隔一段时间组织一次分配。假设整个动态分配过程时间是有限的，这里讨论一种极端情况——频率最慢的情况，也就是只在最后一期分配的动态 TTC 机制 (DTTC-LF)。在模型中，可以简化为对于所有参与者，无论他们在什么时候进入市场或项目，都需要等待到第  $T$  期才能参与交换和分配，被分配的物品集合也仅限于他们的初始禀赋和当期可用的公共物品。实际参与分配的都是其退出市场的时间为  $T$  的那些参与者和禀赋物品，而提前离开的参与者及其禀赋就无法参与分配。具体机制运行如下：

对任意动态分配问题  $\omega = (A, H, \mu_0, T^A, T^H, Q^A, Q^H, >)$ ， $\varphi^{LF}(\omega) = \mu^{LF} = (\mu_1^{LF}, \mu_2^{LF}, \dots, \mu_T^{LF})$  满足，对任意  $t=1, 2, \dots, T$ ，

$$\mu_t^{LF}(A_i) = \begin{cases} \varphi^{TTC}(\overline{A}^t, \overline{H}^t, \mu_0, >)(A_i), & t = T \\ \mu_0(A_i), & t < T \end{cases}$$

其中  $\overline{A}^t = \{A_i \mid Q(A_i) = T\}$ ， $\overline{H}^t = \{H_i \mid H_i \in \overline{A}^t\}$ 。

**定理 3** DTTC-LF 满足防策略性、个人理性，但不满足帕累托有效性。

详细证明参见附录。定理 3 说明了当分配频率达到最低时，存在满足防策略性和个人理性的机制。同时，想要达到防策略性和个人理性，那么有效性就无法满足。

定理 2 和定理 3 展示了分配频率在最高和最低时所能实现的性质。在每期分配都是帕累托有效、个人理性和防策略的前提下，参与者进入就进行分

配的动态机制是帕累托有效和个人理性的,但并不满足防策略。反之,如果只在最后一期时进行一次分配,动态机制是个人理性且防策略的,但并不能满足帕累托有效。因此,可以得出结论,在保证单期分配的有效性、个人理性的前提下,最高的分配频率是动态帕累托有效的充分条件,而最低的分配频率是动态防策略性的充分条件。

但在实践中,机制所能实现的社会总福利往往比能否实现帕累托有效更为重要。资源分配者更多需要考虑社会总效用的实现。而对于肾脏、骨髓移植等分配问题,机制设计者更多需要考虑的是平均生存率的提升幅度。这些指标在前面的定性分析中都无法讨论,而帕累托有效的分配也不一定能保证社会总福利的最大化。因此,本文将进一步就社会总福利角度讨论分配频率与动态机制的有效性之间的关系。

#### 四、分配频率对社会总福利的影响

在公共资源动态分配的实践中,社会总福利的实现往往是关注的重点。例如医院病床、器官移植分配问题中病人总的生存率最大化等。要对这些变量进行分析,需要了解参与者的事后效用或者偏好,但大多数参与者偏好或效用比较主观,进行分析的结果会与实践偏差较大。而器官移植分配问题,尤其是骨髓移植匹配问题中患者的生存率主要与移植器官匹配度有关,该变量是由患者与供者之间的基因决定的,受患者主观影响很小。因此本文选取骨髓移植分配问题讨论动态机制的分配频率与社会总福利,主要是患者的生存率之间的关系。为排除其他因素干扰,本文假设每一次分配总是满足静态的帕累托有效、个人理性和防策略性。由于目前中国的骨髓分配机制还没有引入完善的交换机制且单期不满足有效性,因此本文的仿真模拟还是采用 TTC 机制。

##### (一) 模拟实验数据

骨髓移植是治疗 70 余种先天性或获得性恶性造血系统疾病的普遍且有效的疗法。根据世界血液和骨髓移植网络(WBMT)统计,截至 2013 年全球累计移植患者达到了 100 万例。骨髓移植需要患者和骨髓捐赠者之间满足人类白细胞抗原(HLA)匹配条件。选择与受者 HLA 匹配的供者可以降低排斥反应和移植物抗宿主病。骨髓移植中受者与供者等位基因相同的位点数越多,发生排斥反应和移植物抗宿主的概率以及严重程度越低,相应的生存率越高(Lee, 2007)。目前中国 HLA 配型检测主要检测 HLA-A、HLA-B、HLA-C、HLA-DRB1、HLA-DQB1 这五个位点(赵桐茂, 2015)。由于人体两条染色

体都存在 HLA 遗传区，所以总共需要检测 10 个位点。匹配度代表患者与供体之间的匹配程度，用患者与供者之间等位点相同个数表示，等位点相同个数越高意味着患者与供者之间的匹配程度越高。例如，10/10 表示患者与供者完全匹配，0/10 表示患者与供者完全不匹配，其中基因位点匹配 10/10、9/10 和 8/10 为高质量匹配。因此，在模拟实验中，患者对骨髓供者的偏好主要由相同等位基因的数量决定。本文借助中国人 HLA 单倍体前 8 中基因频数对不同频率下的 DTTC 机制的匹配率和生存率进行分析（部分见表 4）。为提高模拟实验运算效率，本文只选取了前 1 843 种常见单倍体，这些单倍体在中国人基因中出现的概率超过了 99.991%。

表 4 中国人 HLA 单倍体前 5 种基因单倍体频数（总样本量<sup>106</sup>）

A	C	B	DRB1	DQB1	南方人	北方人
1 : 01	1 : 02	46 : 01	8 : 03	6 : 01	47	106
1 : 01	1 : 02	46 : 01	9 : 01	3 : 03	149	137
1 : 01	1 : 02	54 : 01	12 : 01	3 : 01	25	149
1 : 01	1 : 02	55 : 01	13 : 01	6 : 03	23	115
1 : 01	2 : 02	27 : 05	4 : 08	3 : 01	24	108

资料来源：The allele frequency net database [EB/OL], <http://www.allelefrequencies.net/>, 访问时间：2019年9月18日。

检验动态分配机制的优化效率，仿真模拟具体参数选取如表 5。本文主要设定了 6 个参数：交换市场的总期数、患者的总人数、相关供者的比例、一代直系血亲相关供者比例、骨髓库规模、错配容忍度，其中错配容忍度是指在进行骨髓 HLA 匹配过程中，病人能接受的最大的错配点位数量。目前，中国大多数医院在 10 个位点中最多能够容忍 5 个错配。本文假设患者按照均匀分布在 20 期内进入项目，而他们离开项目的时间也服从一个从进入市场时期到第 20 期之间的均匀分布。

表 5 骨髓移植分配效率测算数据选取

交换市场的总期数 ( $T$ )	20
患者总数 ( $A$ )	10 000
相关供者的比例 ( $DH/A$ )	1
一代直系血亲相关供者比例 ( $FH/P$ ) <sup>9</sup>	10%
骨髓库规模 ( $H$ )	5 000 <sup>10</sup>
错配容忍度	5/10

<sup>9</sup> 一代直系血亲相关供者会有一条染色体与患者一致，所以两人之间的匹配度大于等于 5/10。

<sup>10</sup> 2014—2019 年连续 6 年的中华骨髓库年度报告显示，造血干细胞捐赠者的数量都在患者总数量的 50% 左右，所以本文在模拟中除特别说明的部分都采用这个数据作为无关供者与患者人数的比例。

## (二) 不同频率下动态分配机制的社会福利分析

### 1. 各频率动态机制下患者匹配率

为排除其他因素干扰, 本文假设每一次分配总是满足静态下的三个性质, 因此每次分配都将采用 TTC 机制。本小节将分析不同频率下动态分配机制所达到的匹配率, 即匹配的患者数量/患者总数。在总期数为 20 期的交换市场中, 分别对匹配频率从 1 到 10 的分配机制进行模拟, 并得出了各频率动态分配机制下, 不同匹配度中获得匹配骨髓的患者数量以及匹配率(见表 6 和图 3)。<sup>11</sup>

在匹配总效率方面, 随着分配频率的逐渐降低, 患者总匹配率总体呈现降低的趋势。当分配频率最高即每 1 期进行分配时, 由于每当患者进入后都能够及时地进行分配, 总匹配率达到最高 96.99%。当分配频率为每 10 期进行分配时, 由于在 20 期的市场中一共匹配两次导致相当大部分患者未匹配就离开市场, 总匹配率为最低 49.82%。

在匹配质量方面, 分配频率对高匹配度(10/10、9/10、8/10)的匹配概率影响是非单调的, 即随着分配频率逐渐提高, 高匹配度的匹配概率呈现先增加后减少的趋势。其中, 每 1 期分配频率下, 高匹配度的匹配概率为最低, 仅 14.8%。相较之下, 每 5 期分配频率下高匹配度的匹配概率达到了 22.4%。这个现象的主要原因是随着分配频率的提高, 每一次参加项目匹配交换的患者数量和供体数量都在减少。

表 6 各个频率的动态分配机制中患者不同匹配度的匹配概率

匹配度	匹配频率(总期数为 10 期)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10/10	1.61	2.06	2.39	2.55	2.76	2.77	2.32	2.55	2.63	2.4
9/10	3.37	5	5.19	5.97	5.92	5.83	5.3	5.64	5.89	5.08
8/10	9.82	12.3	12.97	13.74	13.72	13.29	11.49	12.61	12.2	10.57
7/10	22.01	23.36	22.26	22.24	21.28	19.8	16.1	17.11	16.74	14.84
6/10	30.79	27.56	22.48	21.63	19.16	16.82	12.54	13.41	12.98	11.62
5/10	29.39	19.98	13.58	12.1	10.01	8.08	5.98	5.59	5.52	5.31
0	3.01	9.74	21.13	21.77	27.15	33.41	46.27	43.09	44.04	50.18

注: 表中匹配频率数越低代表频率越快, 例如匹配频率为 1 意味着每期都进行匹配, 而匹配频率为 10 代表每 10 期匹配一次。

<sup>11</sup> 由于当分配频率为 11 至 20 时, 在总期数为 20 期的交换市场都只会分配一次, 导致无法分析分配次数对效率的影响, 因此本文关注分配频率为 1 至 10 的动态机制的效率。

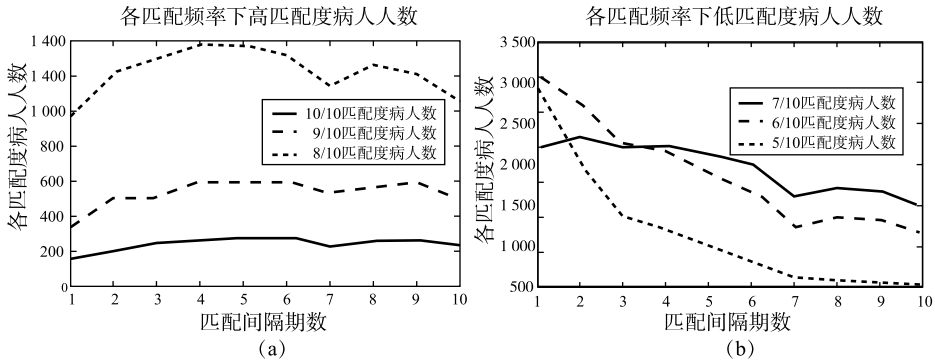


图 3 匹配间隔期数与动态分配机制各匹配度下匹配人数

分配频率对单次分配的患者规模有着显著影响，从而对匹配效率产生影响。根据王湛和韩袞鑫（2019）对静态 TTC 机制分配效率的参数敏感性分析，在患者样本小于 10 000 人时，匹配项目的规模对分配效率，尤其是高匹配度的匹配概率影响很大。图 4 显示了不同分配频率下，参与分配的总患者规模以及平均每次参与分配的患者规模。可以看到，随着分配频率的降低，平均每次参与分配的患者规模越来越大，但分配的次数越来越少，总的分配人次存在相当大的起伏。其中，当分配频率为 1 时，参与分配的总患者人次最多，但由于高频率地进行分配，每次参与分配的患者规模最小。这导致了每次分配下高匹配度的匹配概率很低，从而印证了前文分配频率为 1 时高匹配度的匹配概率最低的现象。值得注意的是，当分配频率为 7 到 10 时，在总期数为 20 期的交换市场中，分配次数都为 2 次。在分配次数固定的情况下，频率越低能够参与到分配的患者数量就越大，从而交换规模出现了递增现象。

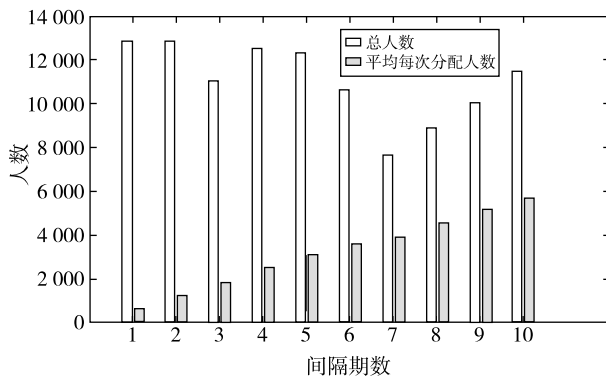


图 4 不同频率下参与匹配的总人次以及平均每次参与匹配人数

2. 各频率动态机制下患者生存率

患者的生存率是评价器官移植项目效果的主要指标。Lee（2007）指出在骨髓移植中受者与供者等位基因相同的位点数与生存率呈正相关。表 7 显示中华骨髓库跟踪的不同相合程度的骨髓移植患者 100 天和 1 年生存率也验证

了这个理论。<sup>12</sup> 本小节将分析不同频率动态机制下患者的平均术后 100 天生存率和术后一年生存率。

表 7 2006—2015 年以受捐者 HLA 高分辨分型结果匹配

受者 HLA 匹配度	样本量	术后 100 天生存率 (%)	术后一年生存率 (%)
		$s_i^0$	$s_i^1$
10/10	1 963	87	74
9/10	1 276	84	72
8/10	490	83	69
7/10	95	82	64
6/10	11	77	62
5/10	4	0	0
总计	3 839	85%	72%

资料来源：中华骨髓库 2016 年年报 [EB/OL], <http://www.cmdp.org.cn/show/1037327.html>, 访问时间：2018 年 11 月 12 日。

根据表 7 数据，本小节计算出各频率动态机制下的患者总平均生存率，包括患者百天平均生存率 =  $\sum_{i=1}^7 s_i^0 \times \frac{N_i}{N}$ ，患者一年平均生存率 =  $\sum_{i=1}^7 s_i^1 \times \frac{N_i}{N}$ ，其中， $s_i^0$ 、 $s_i^1$  和  $N_i$  分别代表匹配度  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$  (1 代表 10/10, 2 代表 9/10, ..., 7 代表 0) 的术后 100 天生存率、术后一年生存率以及匹配人数； $N$  代表总的样本数量。

表 8 显示了各频率机制下患者的平均生存率。根据表 8，随着匹配频率的增加，虽然患者的总匹配率增加，但患者的平均生存率并没有出现显著增加。这个结论说明提高骨髓移植匹配的分配频率，的确可以提高项目的总匹配概率，但由于项目高匹配度患者数量减少，患者的平均匹配生存率并没有显著提高。因此，从定性分析中得到结论，提高分配频率，能够减少未匹配的人数，但在分析中看到，提高分配频率，反而可能降低患者的生存率。这意味着骨髓交换项目中不是频率越高越好，因此选择一个合适的分配频率是十分重要的。

表 8 各频率动态分配机制中患者平均生存率 (%)

生存率	匹配频率 (总期数为 10 期)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100 天	0.54	0.57	0.53	0.54	0.51	0.48	0.39	0.42	0.41	0.36
1 年	0.44	0.46	0.43	0.43	0.41	0.39	0.32	0.34	0.33	0.29

<sup>12</sup> Kolb *et al.* (1995) 发现移植手术后在输注介导 GVHD 的相同供体血液单核细胞，也就是所谓的供体——淋巴细胞输注 (DLIs)，可以控制异源基因造血干细胞的受者 GVHD 的复发，以减少移植抗宿主病的危险。虽然如此，但在移植手术中，匹配度越高的供体还是更受欢迎。



本文尝试寻找在 10 000 个患者样本以及总期数为 20 期的交换项目下,使得平均生存率最高的项目的分配频率。图 3 显示了在总的期数为 20 期的交换市场中,每 1 期至每 10 期匹配频率下,各个匹配度的匹配患者数量。根据图 3(a),随着匹配间隔期数增大,也就是分配频率变低,高匹配度(10/10、9/10、8/10)的匹配患者数量都出现一个先增加再减少的趋势,增加趋势的原因如前文分析,是由于分配频率变小以后,每次参与匹配交换的患者和供体变多导致的。看到当匹配相隔期数超过 6 以后,高匹配度的匹配人数有一个明显的变小的趋势,这是由于在 20 期内,虽然每次匹配人数上升,但匹配次数变得太少,导致最终高匹配度总匹配患者人数变少。根据图 3(b),随着分配频率的降低,低匹配度(7/10、6/10、5/10)的匹配患者数量呈现降低趋势。导致这个趋势的原因有两个:一是随着分配频率降低,每次匹配人数上升,所以每次匹配的高匹配度患者比例变高,相应地低匹配度患者比例就会降低;二是在于分配频率降低,在 20 期内匹配的总次数减少,也导致了总的低匹配度患者数量减少。又由于低匹配度患者所占比重很大,受此影响,总匹配的患者数量也在随着分配频率的下降而下降。

根据表 8 数据,本文计算每一种分配频率下患者的平均 100 天生存率以及平均一年生存率(见图 5)。

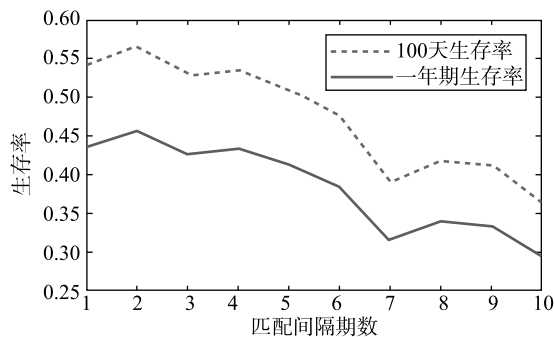


图 5 不同分配频率下的生存率

根据图 5,随着分配频率下降,间隔期数上升,患者的平均 100 天生存率和一年生存率都存在一个明显下降的趋势。但是,所有仿真模拟中患者生存率最高的是每 2 期匹配的项目,相对于每期匹配的项目在 100 天生存率和一年生存率分别提高了大约 2.5% 和 2%。因此,在 10 000 个患者样本以及总期数为 20 期的交换项目下,每 2 期匹配能使得患者平均生存率最大。需要注意的是,在不同环境下(例如不同的患者和供体规模),患者生存率最高的分配频率会不尽相同,在项目运行前,对项目进行仿真模拟,会帮助找到合适的方案,从而提高效率。同时,本文对不同环境下的分配频率对机制效率影响进行讨论,希望给出参数对最优分配频率的影响,让结果能够更好地为不同的地区和项目服务(详细参见附录)。

(三) 模拟实验：不同样本参数下，各匹配频率动态机制的效率

在不同样本下（如患者和供体规模），分配结果会不尽相同。本文将在控制其他因素不变的情况下，分别从患者规模和错配容忍度的角度，探讨不同频率动态机制的分配结果，从而能够更好为不同的地区和项目服务。具体参数选取如表 9。

表 9 骨髓移植分配效率测算数据选取

测算数据	患者规模影响	错配容忍度影响
交换市场的总期数 ( $T$ )	20	20
患者总数 ( $A$ )	10 000—30 000	10 000
每一位患者的初始禀赋 ( $DH/A$ )	1	1
一代直系血亲相关供者比例 ( $FH/P$ )	10%	10%
骨髓库规模 ( $H$ )	5 000	5 000
错配容忍度	5/10	3/10—7/10
分配频率	1—10	1—10

在患者规模方面，不同地区参加交换的患者规模会不尽相同，而患者数量会对交换项目的分配效率存在影响。因此这里模拟在不同患者数量下，不同分配频率下骨髓移植匹配的分配效率，希望找到不同患者数量下的最优分配频率。模拟得到不同患者参数条件下，分配频率与各匹配度患者之间的关系如图 6：

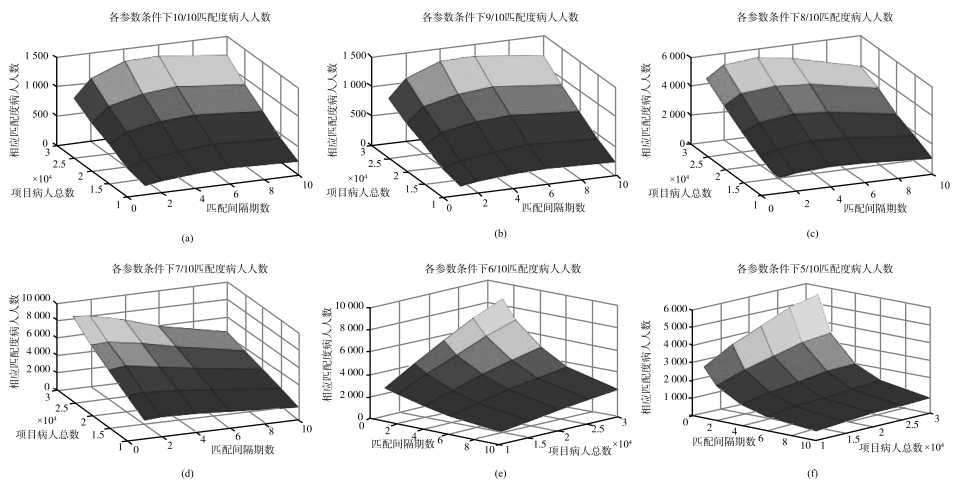


图 6 项目患者总数与分配频率对各匹配度患者数量影响

图 6 显示，无论高匹配度还是低匹配度的患者数量都会随着患者总数提高而提高，但高匹配度患者在各个分配频率下随患者总数提高都非常显著，

而在低匹配度下，只有分配频率较高时，患者总数提高对匹配数量的影响明显，在分配频率较低时，低匹配度患者数受到总项目人数的影响就不显著了。在另一个维度上，10/10、9/10和8/10这几个高匹配度的匹配患者数量在每一个项目患者总数下，变化趋势基本一致，都出现一个先增加再减少的趋势。这个变化趋势的原因如前文分析，增加趋势是由于分配频率变小以后，每次参与匹配交换的患者和供体变多导致的，而当匹配相隔期数超过6以后的减小趋势是由于在20期内，虽然每次匹配人数上升，但匹配次数变得太少，导致最终高匹配度总匹配患者人数变少。对应7/10、6/10和5/10等低匹配度的匹配患者数量在所有项目患者总数条件下都在随着分配频率降低而下降，原因与前文分析一样，一是单次匹配患者数变多，二是匹配次数变少。

下面分析项目的总分配效率，结合表7数据计算患者平均生存率如图7所示。

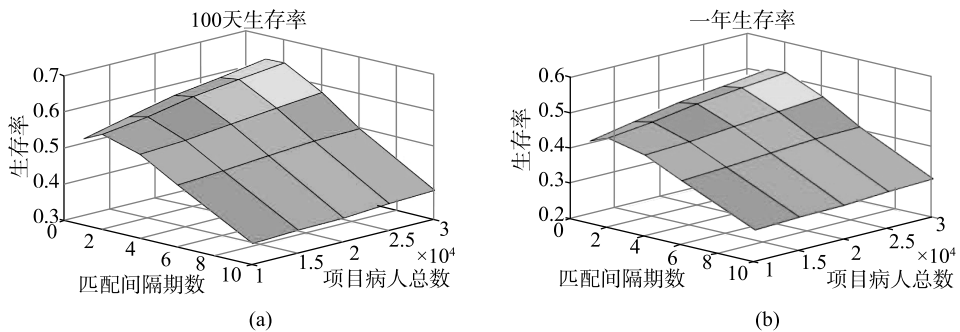


图7 项目患者总数变化时的平均生存率

图7显示，在不同的项目患者总数条件下，生存率都没有随着匹配间隔期数呈现单调变化，都存在随着分配频率降低而先增加后减少现象，而且这几次模拟结果发现都在每两期匹配时生存率达到最大。从另一个维度来看，患者的平均生存率会随着项目患者总数提高而提高，但并不显著。

在错配容忍度方面，随着对宿主排异反应以及移植物抗宿主病治疗水平的提高，骨髓移植的错配容忍度变得越来越大。理论上更高的错配容忍会带来更大的匹配概率，但实际动态机制运行中，更大的匹配概率会导致每一期参与匹配的人数变少，实际效率变化如何需要进行新的仿真模拟。由于错配容忍度比较高时，低匹配度患者数为0，这里只展示10/10、9/10、8/10和7/10患者的变化趋势。模拟得到不同错配容忍度参数条件下，分配频率与各匹配度患者之间的关系如图8所示。

图8显示10/10、9/10高匹配度的患者数量不随错配容忍度变化而单调变化。在不同分配频率下，存在最合适的错配容忍度，如在每6期匹配一次时，错配容忍度5使得10/10的患者数最大，错配容忍度4能让9/10的患者数最大。主要原因在于错配容忍度对高匹配度患者影响不大，所以总体变化趋

势并不十分显著。而在图8(c)和图8(d)中,患者数量对错配容忍度显示出比较强的单调关系,在每种分配频率下,患者数量都会随着错配容忍度的升高而降低,这是因为错配容忍度的提高,增加了对应的6/10、5/10、4/10和3/10匹配度的患者数量,使得8/10和7/10中的患者数量明显减少。在另一个维度中,10/10、9/10、8/10以及7/10的匹配患者数量在每一个项目患者总数下,变化趋势基本一致,都出现一个先增加再减少的趋势。

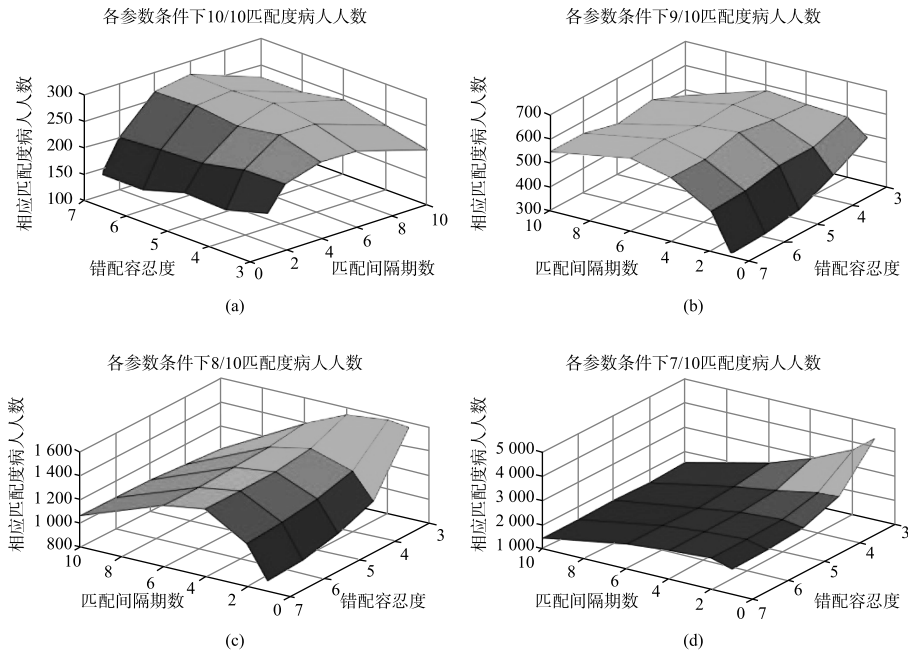


图8 错配容忍度与分配频率对各匹配度患者数量影响

下面分析项目的总分配效率,结合表7数据计算患者平均生存率如图9所示。

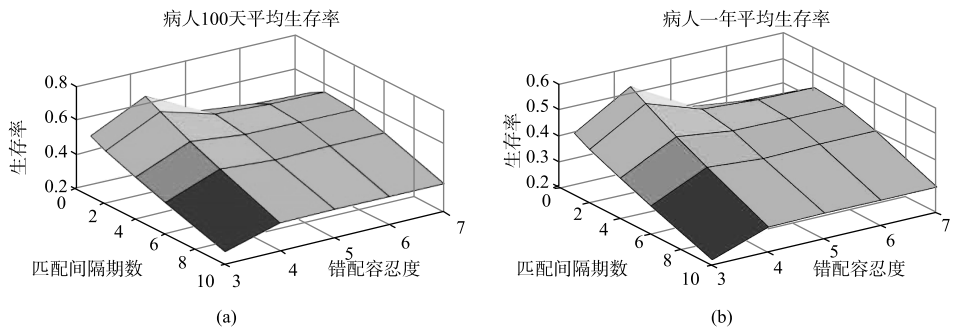


图9 错配容忍度变化时的平均生存率

图9显示,当错配容忍度大于等于5时,生存率没有随着匹配间隔期数呈现单调变化,都存在随着分配频率降低而先增加后减少现象,而且这几次模拟结果发现都在每两期匹配时生存率达到最大。但当错配容忍度小于5时,

100天生存率与一年生存率都呈现单调变化，分配频率越高，平均生存率也越高。从另一个维度来看，患者的平均生存率在错配容忍度为4时最高，主要原因在于表7中的生存率数据在错配容忍度小于等于4时都为正，而大于4时都是0，而错配容忍度为4能够最大限度提高错配容忍度小于等于4的概率，于是提高了生存率。随着医疗水平的提高，不同匹配度下的生存率会不同程度地提高，相应的也会有其最优的错配容忍度。

#### （四）仿真模拟实验分析结论

从动态分配机制的分配频率与分配效率的分析看出，虽然在定性分析中，很多效率缺失都是由于分配频率太低导致的，但通过仿真模拟分析，分配频率并非越高越好，例如在前文给出的参数条件下，每两期匹配在宏观效率上是最优的。相较于分配频率更高的每期匹配策略，每两期匹配虽然总匹配概率少了6%左右，但在最重要的生存率指标上，每两期匹配策略能够分别提高5%左右的100天生存率与一年生存率。并且，当患者人数和错配容忍度这两个参数条件变化时，模拟发现患者人数增加都对动态分配机制的分配效率存在正向影响；错配容忍度与动态分配机制的分配效率没有单调关系；以及患者人数对最优分配频率的选择影响不大，不同的患者人数参数下，最优分配频率基本不变。

以上所有的结论都可以推广到一些参与者只关注最终分配的公共资源分配问题中，例如公立中小学学位等问题。对于这些问题，动态分配机制的分配频率与社会总福利并不存在单调关系，与定性结论不同，并不是分配频率越高，效率越高，两者之间关系呈现一个倒“U”形，存在一个最优分配频率。并且改变市场中的其他参数，也不会改变分配频率与社会总福利之间的关系。进一步推广到参与者会关注过程中分配的公共资源分配问题，例如医院床位、公共租赁住房等问题，分配频率与社会总福利之间倒“U”形的关系依然成立。因此，在设计社会公共资源的分配机制时，应当把分配频率作为一个重要参数加以分析，针对不同的实践问题制定不同的频率，以保证社会公共资源的有效分配。

## 五、总 结

本文为动态分配机制的有效性引入了分配频率这一新的分析维度，在保证单次分配有效性的前提下，分配频率的高低成为实现分配动态有效性的关键因素。接下来主要从帕累托有效和社会总福利两个方面讨论了社会公共资源的动态分配频率与分配效率的关系。公共资源分配是一个动态的过程，分配过程中不断会有参与者和物品进入和离开。虽然大量文献研究已经表明，TTC机制被认为在静态环境下能够同时满足帕累托有效、个人理性以及防策

略, 但鲜有文献分析其在实践的动态环境下的性质。本文发现在动态环境下, 由于不断有参与者、参与者禀赋以及公共资源在分配过程中进入和退出, 低频率的动态 TTC 机制会造成效率缺失, 而提高动态 TTC 机制的分配频率会影响机制的防策略性。

为分析在动态环境下公共资源分配机制的相关性质, 本文建立了公共资源动态分配模型, 并定义机制的帕累托有效、个人理性和防策略性。本文主要探讨了三个问题: 第一, 用反证法证明同时满足以上三个性质的动态分配机制不存在; 第二, 在保证单期分配机制是有效且个人理性的前提下, 发现分配频率成为机制满足防策略性或帕累托有效性的关键因素, 并证明当分配频率最快时, 动态机制满足帕累托有效但不满足防策略性, 而当分配频率最慢时, 动态机制满足防策略性但不满足帕累托有效。第三, 探讨分配频率与社会总福利的关系。利用中国人 HLA 基因频率库数据, 建立骨髓移植交换匹配项目的患者样本和供体样本, 进行仿真模拟实验, 通过多个不同分配频率下的匹配率比较, 发现随着分配频率的逐渐降低, 患者总匹配率总体呈现降低的趋势, 且分配频率对高匹配度的匹配概率影响是非单调的。并且, 通过对多个不同分配频率下的生存率比较, 发现在 10 000 个患者样本等参数条件下, 每 2 期匹配所得到的患者平均生存率最高。

本文建立的动态分配模型允许无禀赋参与者、有禀赋参与者与其禀赋资源和公共资源进行交换分配, 同时考虑参与者和资源可以动态地进入和退出市场, 因此该模型具有一般性, 并可以被应用到除骨髓移植外的其他分配场景, 如肾源交换、学校宿舍分配问题、公租房分配问题等。该模型存在三个方向的扩展: 第一, 多物品的扩展。可以将本文模型扩展到参与者需求多物品的市场。在参与者对物品组合的偏好是可替代的假设下, 本文的定理 1 至定理 3 是适用的。第二, 弱偏好的扩展。可以将模型扩展到参与者有非严格偏好的市场, 在参与者最多只能拥有一件物品的假设下, 本文定理 1 至定理 3 是成立的。第三, 无限期的扩展。可以将模型扩展为无限期, 本文定理 1 成立, 如果假设每一位参与者在市场中的时间有限, 即对任意参与者  $A_i$ ,  $Q^A(i) - T^A(i) < +\infty$ , 定理 1 至定理 3 也同样适用。

## 参 考 文 献

- [1] Abdulkadiroğlu, A., and T. Sönmez, "House Allocation with Existing Tenants", *Journal of Economic Theory*, 1999, 88 (2), 233-260.
- [2] Abdulkadiroğlu, A., and S. Loertscher, "Dynamic House Allocations", 2007, Working Paper.
- [3] Bando, K., "Dynamic Matching Markets with Choice Functions", Mimeo, 2012.
- [4] Bloch, F., and D. Cantala, "Markovian Assignment Rules", *Social Choice and Welfare*, 2013, 40, 1-25.
- [5] Damiano, E., and R. Lam, "Stability in Dynamic Matching Markets", *Games and Economic Be-*

- havior*, 2005, 52 (1), 34-53.
- [6] Dur, U., "Dynamic School Choice Problem", Mimeo, 2012.
- [7] Kolb, H. J., *et al.*, "Graft-Versus-Leukemia Effect of Donor Lymphocyte Transfusions in Marrow Grafted Patients", *Blood*, 1995, 86 (5), 2041-2050.
- [8] Konishi, H., T. Quint, and J. Wako, "On the Shapley-Scarf Economy: The Case of Multiple Types of Indivisible Goods", *Journal of Mathematical Economics*, 2001, 35 (1), 1-15.
- [9] Kurino, M., "Credibility, Efficiency, and Stability: A Theory of Dynamic Matching Markets", *The Japanese Economic Review*, 2020, 71, 135-165.
- [10] Lee, S. J., *et al.*, "High-resolution Donor Recipient HLA Matching Contributes to the Success of Unrelated Donor Marrow Transplant", *Blood*, 2007, 110 (13), 4576-4583.
- [11] Liu, P., "A Large Class of Strategy-proof Exchange Rules with Single-peaked Preferences", Working Paper, 2018.
- [12] Lien, J. W., J. Zheng, and X. Zhong, "Preference Submission Timing in School Choice Matching: Testing Fairness and Efficiency in Laboratory", *Experimental Economics*, 2016, 19 (1), 116-150.
- [13] Lien, J. W., J. Zheng, and X. Zhong, "Ex-ante Fairness in the Boston and Serial Dictatorship Mechanisms under Pre-exam and Post-exam Preference Submission", *Games and Economic Behavior*, 2017, 101, 98-120.
- [14] Ma, J., "Strategy-proofness and the Strict Core in a Market with Indivisibilities", *International Journal of Game Theory*, 1994, 23 (1), 75-83.
- [15] Morrill, T., "An Alternative Characterization of Top Trading Cycles", *Economics Theory*, 2013, 54, 181-197.
- [16] Pereyra, J. S., "A Dynamic School Choice Model", *Games and Economic Behavior*, 2013, 80, 100-114.
- [17] Roth, A. E., T. Sönmez, and M. U. Ünver, "Kidney Exchange", *The Quarterly Journal of Economics*, 2004, 119 (2), 457-488.
- [18] Roth, A. E., T. Sönmez, and M. U. Ünver, "A Kidney Exchange Clearing House in New England", *American Economic Review*, 2005, 95 (2), 376-380.
- [19] Roth, A. E., T. Sönmez, and M. U. Ünver, "Efficient Kidney Exchange: Coincidence of Wants in Markets with Compatibility-based Preferences", *The American Economic Review*, 2007, 97 (3), 828-851.
- [20] Roth, A. E., and A. Postlewaite, "Weak versus Strong Domination in a Market With Indivisible Goods", *Journal of Mathematical Economics*, 1977, 4 (2), 131-137.
- [21] Shapley, L., and H. Scarf, "On Cores and Indivisibility", *Journal of Mathematical Economics*, 1974, 1 (1), 23-37.
- [22] Svensson, L. G., "Strategy-proof Allocation of Indivisible Goods", *Soc Choice Welfare*, 1999, 16, 557-567.
- [23] Zhang, M., and J. Zheng, "Multi-period Matching with Commitment", Working Paper, 2017.
- [24] 王湛、韩袞鑫, "带初始禀赋的公共资源分配机制优化研究: 基于移植骨髓捐赠的有效性分析", 《中国工业经济》, 2019 年第 4 期, 第 174-192 页。
- [25] 赵桐茂, 《骨髓移植 HLA 配型》。上海: 上海科学技术出版社, 2015 年。

## Frequency and Efficiency of Dynamic Public Resource Allocation Problems

WANG Zhan CHENG Yao\*

(Southwestern University of Finance and Economics)

**Abstract** The Top Trading Cycles mechanism has been proved to be efficient, individually rational and strategy-proof in static public resource allocation problems. However, in dynamic environment, there exist tradeoffs between efficiency and strategy-proofness because of the allocation frequency. The relationship between the allocation frequency and efficiency from both qualitative and quantitative aspects is discussed in this paper. In terms of qualitative aspect, there is no dynamic mechanism that is efficient, individually rational and strategy-proof. Meanwhile, the allocation frequency is closely related to the efficiency. In terms of quantitative aspect, there is no monotonic relationship between the frequency and the quantitative efficiency. The two show an inverted “U” shape, and there is an optimal allocation frequency.

**Keywords** mechanism design, dynamic allocation, frequency

**JEL Classification** C62, C72, C78

---

\* Corresponding Author: Cheng Yao, Economics School, Southwestern University of Finance and Economics, No. 555 Liutai Avenue, Chengdu, Sichuan 611130, China; Tel: 86-18616202073; E-mail: chengyao@swufe.edu.cn.